Scomposizione della differenza e della somma di due potenze di uguale esponente

Utilizzando il teorema del resto e la regola di Ruffini otteniamo le seguenti regole

1° CASO

La differenza di due potenze di uguale esponente $a^n - b^n$ con n dispari è divisibile $solo\ per\ a-b, ma\ non\ per\ a+b$

Applicando infatti il teorema del resto si ottiene
Per a-b ⤇ P(b)= $b^n - b^n = 0$
Per a + b ⤇P(-b) = $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n \neq 0$

Per ottenere le scomposizioni procediamo applicando la regola di Ruffino

ES. $a^5 - b^5$ come dimostrato sopra è divisibile per a-b e quindi applichiamo la Regola di Ruffini

	1	0	0	0	0	$-b^5$
b		b	b^2	b^3	b^4	b^5
	1	b	b^2	b^3	b^4	0

⤇ $a^5 - b^5 = (a-b))(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^4 + b^4)$

Si può memorizzare così

La differenza di due potenze di uguale esponente n dispari è=(differenza delle basi) *(un polinomio omogeneo di grado n-1 ordinato secondo le potenze decrescenti della prima base e crescenti della seconda base a segni positivi)

CASO n. 2

La somma di due potenze di uguale esponente n dispari $a^n + b^n$è divisibile per a + b e non per a -b

Infatti, P(-b) = $-b^n + b^n = 0$

P(+b) = $b^n + b^n = 2b^n \neq 0$

Applichiamo la regola d Ruffini ad $a^5 + b^5$

	1	0	0	0	0	b^5
-b		-b	b^2	-b^3	b^4	$-b^5$
	1	-b	b^2	$-b^3$	b^4	0

⤇ $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$

Per la pagina successiva vai col mouse in fondo alla pagina e clicca sulla freccia

Si può memorizzare così

La somma di due potenze $a^n + b^n$di uguale esponente n dispari è= (somma delle basi) *(un polinomio omogeneodi grado n-1   ordinato secondo le potenze decrescenti della prima base e crescenti della seconda base a segni alterni)

3° CASO

La differenza di due potenze con esponente n pari è divisibile sia per a-b che per a +b

Infatti tenendo conto di n pari risulta P(b) = $b^n - b^n = 0$

P(-b) = $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$

La scomposizione si può ridurre sempre a differenza di due quadrati senza dover applicare la regola di Ruffini

$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

4° CASO

La somma di due potenze di uguale esponente n pari $a^n + b^n$ non è è divisibile per a + b né per a -b

Infatti   P(-b) = $(-b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n \neq 0$

P(+b)= $b^n + b^n = 2b^n \neq 0$

Concludiamo l'argomento con qualche esempio

$$x^6 - a^3 = (x^2)^3 - a^3 = (x^2 - a)(x^4 + ax^2 + a^2)$$

$$x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) =$$

$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$